Berechnung des Schwerpunktes Kamp-Lintforts

von

Kei Schulz

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Eine Facharbeit sollte einen lokalen sowie aktuellen Schwerpunkt besitzen.
Was liegt näher, diese Aufgabenstellung wörtlich zu nehmen und den lokalsten aller Schwerpunkte zu bestimmen: den Geometrischen unserer Stadt Kamp-Lintfort. Zumal diese mathematische Spielerei aktuellen Bezug zum Jahr 2008 dem Jahr der Mathematik besitzt.
Auch, wenn die Bürger einer Stadt oder Region ohne zu wissen, wo sich der Schwerpunkt befindet, gut leben können, so haben sich doch trotzdem auch andere Mitmenschen diese Frage gestellt. So wurden im Internet auch die Schwerpunkte der Städte Berlin[1] und Münster[2] sowie der Europas[3] veröffentlicht.

In der folgenden Facharbeit befasse ich mich nun also mit der Berechnung, der Herleitung und den Notwendigkeiten des Schwerpunktes Kamp-Lintforts. Damit diese Arbeit überhaupt entstehen konnte, bedanke ich mich an dieser Stelle bei dem „Fachbereich 62 Vermessung und Kataster“ der Kreisverwaltung Wesel für die gelieferten Daten über die Kamp-Lintforter Stadtgrenze. Und hiermit sind wir schon mitten drin. Als erstes werde ich auf die Besonderheiten der Koordinaten eingehen, die den genauen Punkten der Stadtgrenze entsprechen.

Das nächste Problem wird sein, eine allgemeine Definition für den Begriff des „Schwerpunktes“ zu finden und diese Definition in eine mathematisch brauchbare Formel umzuwandeln. Ich werde zwei Lösungsvarianten aufzeigen, um das Problem klären zu können. Bei der ersten Variante wird die Integralrechnung benutzt, bei der Zweiten reicht die elementare Geometrie zur Berechnung aus. Diese zweite eigenständig entwickelte Formel, die meines Wissens in der Fachliteratur nicht existiert, wird dann im Anschluss mittels Tabellenkalkulation praktisch umgesetzt.

Letztlich folgt die Überprüfung des Ergebnisses experimentell mit Lot und Landkarte und an Hand einer im Internet gefundenen Kontrollformel.

1 http://www.osz-kt.de/oszinfo/mitte.htm [Lv 1]
2 http://www.lwl.org/skulptur-projekte-download/muenster/97/sander/index.htm [Lv 2]
3 http://www.math.uni-siegen.de/ring/eu-mitte.html [Lv 3]

2 Besonderheiten der benutzten Daten

Die von der Kreisverwaltung Wesel zur Verfügung gestellten Daten beinhalten 2130 Koordinaten. Bei diesen Werten handelt es sich um so genannte Gauß-Krüger-Koordinaten. Da die Punkte in fortlaufender Reihenfolge abgelegt sind, ergibt sich somit ein koordiniertes Vieleck, dass die amtliche Grenze Kamp-Lintforts darstellt, siehe Abb. 1.

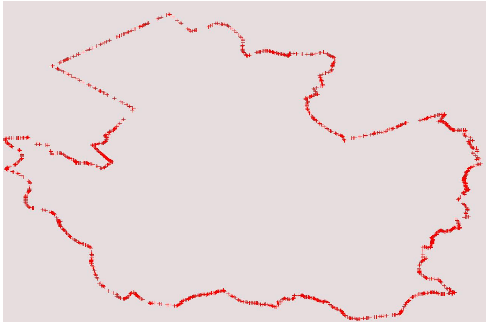

Abb. 1: Darstellung der Daten

2.1 Das Gauß-Krüger-Koordinatensystem

Ihren Namen hat dieses Koordinatensystem von dem bedeutenden Mathematiker Carl Friedrich Gauß und dem Kartographen Johannes Heinrich Louis Krüger[4]. Es wurde mit dem Ziel geschaffen, die annähernde Kugelform der Erde in der Ebene abzubilden und wird in der Landesvermessung benutzt. Allerdings sprengt eine genaue Erklärung den Rahmen dieser Arbeit. Es ist nur wichtig zu wissen, dass es sich um ein ebenes rechtwinkliges Koordinatensystem handelt, **bei dem allerdings x- und y-Achsen vertauscht sind.**

3 Was bedeutet der Begriff „Schwerpunkt“ genau?

Der Schwerpunkt ist ein gedachter Punkt in Körpern, der sich nach den Gesetzen der Mechanik so bewegt, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre. Solange der Körper im Schwerpunkt gestützt bzw. aufgehängt ist, befindet sich dieser im Gleichgewicht[5].
In Körpern hat die Verteilung der Masse, d.h. die u.U. verschiedene Materialdichte, einen wichtigen Einfluss auf die Lage des Schwerpunktes. In der vorliegenden Berechnung des Flächenschwerpunktes wird von einer konstanten Flächendichte ausgegangen. Dadurch ist nur die Flächengröße und ihre Form für die Schwerpunktlage von Bedeutung.

Soll ein rechnerisch exaktes Ergebnis erzielt werden, muss die komplexe Gesamtfläche in einfache Teilflächen zerlegt werden, deren Teilschwerpunkte leicht berechnet werden können. Diese Teilschwerpunkte werden anschließend zum Gesamtschwerpunkt zusammengefasst. In der Literatur findet man zur Berechnung zusammengesetzter Flächen folgende Formeln[6].

$$X_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i * A_i}{\sum_{l=1}^{n} A_i} \quad \text{und} \quad Y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i * A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \quad \text{(Formel 1.1 + 1.2)}$$

In Worten bedeuten diese Formeln: Man bildet das Produkt aus den Teilflächen und der Teilflächenschwerpunktkoordinate x bzw. y und summiert diese auf. Nun teilt man durch

4 Lambacher Schweizer 11 S. 18 [Lv 4]
5 Meyers Physik-Lexikon, S. 739 [Lv 5]
6 Mechanik und Festigkeitslehre, S. 16 [Lv 6]

die Summe der Teilflächen, d.h. durch die Gesamtfläche.

4 Lösungswege zur Schwerpunktberechnung

Im Folgenden werden zwei Berechnungsmöglichkeiten für den Kamp-Lintforter Schwerpunkt erläutert. Zur praktischen Berechnung wird nur die Variante benutzt, die sich datentechnisch leichter umsetzen lässt.
Beide Varianten basieren auf der Zerlegung der Gesamtfläche in Teilflächen, deren Schwerpunkte relativ einfach zu berechnen sind.

4.1 Lösung mittels der Integralrechnung

Um die folgenden Ausführungen verstehen zu können, muss der physikalische Begriff des **statischen Momentes**[7] bekannt sein. Das statische Moment M ist definiert als Produkt aus Kraft F und Hebellänge L:

$$M = F * L$$

Als Beispiel sei hier das Festziehen der Radmuttern bei einen PKW-Reifenwechsel genannt. In der Radmutter entsteht das Moment M, seine Größe ist das Produkt aus Länge L des Radmutternschlüssels und der eingesetzten Kraft bzw. Körperkraft F.

Betrachtet wird die Figur ABCD, siehe Abb. 2, die nach oben durch f(x) begrenzt wird und die Fläche A besitzt. Von dieser Fläche soll der Schwerpunkt S bestimmt werden, d.h. gesucht sind seine Koordinaten ys und xs.

Man denkt sich nun welche Momente dieser Schwerpunkt in den Koordinatensystemachsen bewirkt[8]. Hierzu betrachtet man zwei Hebelsysteme. Beim Ersten liegt der Drehpunkt auf der x-Achse, wobei die Hebelarmlänge der Abstand des Schwerpunktes von der x-Achse (ys) ist. Die wirkende Kraft entspricht der Flächengröße A. Dies gilt analog für die y-Achse. Es entstehen somit folgende Momente in den Achsen:

$$M_x = A * y_s \qquad M_y = A * x_s$$

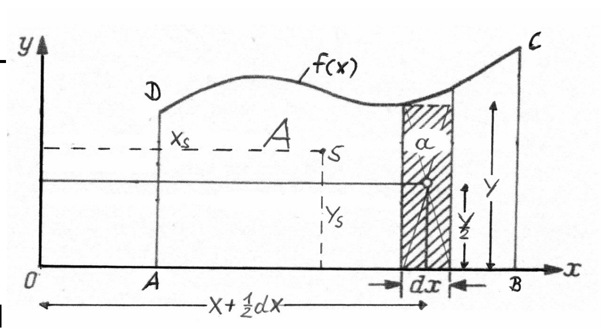

Abb. 2: Herleitung der Schwerpunkte

Um nun die gesuchten Schwerpunktkoordinaten einer beliebigen Funktion f(x) innerhalb eines Intervalls berechnen zu können, kann man die Methoden der Integralrechnung benutzen.
Dazu wird die Fläche in Streifen mit der Breite dx unterteilt. Um das statische Moment einer solchen rechteckigen Streifenfäche a in Bezug auf die Koordinatenachsen berechnen zu können, braucht man ihre Fläche als Masse und die Abstände ihres Schwerpunktes von den Achsen als Hebellängen. Die Streifenfläche a ergibt sich aus der Streifenbreite dx und der Streifenhöhe y und entspricht somit a= y*dx. Da der Schwerpunkt eines Rechteckes im Schnittpunkt der Diagonalen liegt, entspricht sein Abstand von der x-Achse der halben Rechteckhöhe: 1/2*y. Der Abstand von der y-Achse beträgt x+1/2*dx. Wenn die Breite dx gegen Null läuft kann 1/2*dx vernachlässigt werden. Der Abstand von der y-Achse ist

7 Mechanik und Festigkeitslehre, S. 9 [Lv 6]
8 Differential und Integralrechnung, S. 238 [Lv 7]

somit x.

Dieser Streifen verursacht in der x-Achse das statische Moment dMx und in der y-Achse das statische Moment dMy. Sie werden berechnet, indem man den Abstand des Flächen-schwerpunktes von den Achsen mit der Fläche a multipliziert.

$$dM_x = \frac{1}{2} * y * y * dx \quad \text{und} \quad dM_y = x * y * dx$$

$$dM_x = \frac{1}{2} y^2 dx \quad \text{und} \quad dM_y = x\, y\, dx$$

Die statischen Momente Mx und My der Gesamtfläche A, d.h. der Funktion f(x) im Intervall von a bis b, erhält man, wenn man die obigen Formeln integriert:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx \quad \text{und} \quad M_y = \int_a^b x\, y\, dx$$

Das statische Moment Mx und My der Gesamtfläche A kann man wie oben gezeigt, bei bekannten Gesamtschwerpunktkoordinaten Xs und Ys (Hebellängen) und bekannter Gesamtfläche A (Masse) auch so berechnen:

$$M_x = A * y_s \qquad \text{bzw.} \qquad M_y = A * x_s$$

Gleichsetzen liefert:

$$A * y_s = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx \qquad \text{bzw.} \qquad A * x_s = \int_a^b x\, y\, dx$$

Division durch A:

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b y^2 dx \qquad \text{bzw.} \qquad x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x\, y\, dx$$

Anstelle von y kann man auch f(x) schreiben:

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x * f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad Y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b [f(x)]^2 dx \qquad \text{(Formel 2.1 + 2.2)}$$

A kann nach der Regel der Integralrechnung ersetzt werden durch:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Wenn man nun das vorliegende Umringpolygon von Kamp-Lintfort in vertikale Streifen teilt, sodass benachbarte x-Werte die Intervallgrenzen bilden, siehe Abb. 3, entstehen Flächen die oben durch die lineare Funktion f(x) und unten durch die lineare Funktion g(x) begrenzt werden. Durch doppelte Anwendung der Formel 2 bei Differenzbildung ließe sich der Schwerpunkt eines Streifenstückes berechnen[9]:

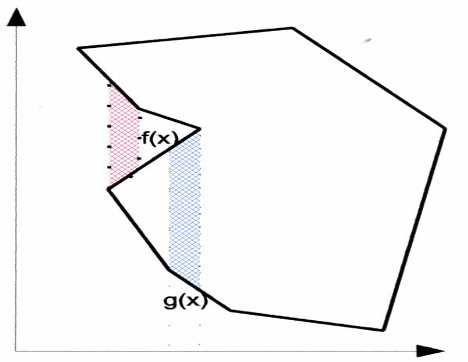

Abb. 3: Beispiel für Streifen per Integral

9 Analysis für Ingenieure, S. 332 [Lv 8]

$$x_s = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x)-g(x)]dx \quad \text{bzw.} \quad y_s = \frac{1}{2A}\int_a^b \{[f(x)]^2-[g(x)]^2\}dx$$

$$\text{mit} \quad A = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

Diese Streifenschwerpunkte sind anschließend mittels der Formeln 1.1 und 1.2 zum Gesamtschwerpunkt von Kamp-Lintfort aufzusummieren, wobei zwischen innen (blau)- und außenliegenden (rot) Streifen unterschieden werden muss .

Dieser Berechnungsweg mittels Integralrechnung ist für das vorliegende Vieleck mit mehr als 2000 Eckpunkten allerdings zu aufwendig und ohne umfangreiche Programmierarbeit praktisch nicht durchführbar.

4.2 Lösung mittels der Aufteilung in Dreiecke

Um das Problem elegant und ohne viel Programmierarbeit zu lösen, wird eine Flächenberechnungsmethode benötigt, die ein koordiniertes unregelmäßiges Vieleck möglichst selbstständig in Teilflächen zerlegt und aufsummiert. Hier bieten sich Dreiecke als Teilflächen an, da bei ihnen der Schwerpunkt das arithmetische Mittel der Eckpunktkoordinaten[10] ist. Für ein Dreieck gilt also:

$$x_s = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \qquad y_s = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \qquad \text{(Formel 3.1 + 3.2)}$$

Ein wenig Recherche im Internet führt zu einem Vorlesungsskript der Fachhochschule Bochum[11]. Hier findet man die sogenannte Gaußsche Dreiecksformel, die sich aus der Gaußschen Trapezformel ableitet, mit der man den Flächeninhalt mit Hilfe seiner Umringkoordinaten berechnen kann. Die Eckpunkte des zu berechnenden Polygons müssen im Uhrzeigersinn nummeriert werden. M**an beachte das y und x in diesem Kapitel im Vergleich zum mathematischen Koordinatensystem vertauscht sind!**

4.2.1 Die 1. Gaußsche Trapezformel

Gesucht wird die Gesamtvielecksfläche A, die durch die Punkte 1, 2, 3 und 4 gebildet wird, siehe Abb. 4. Sie besteht aus folgenden Teilflächen:

T_1: Trapez gebildet durch den Bereich zwischen x-Achse und Seite 1-4

T_2: Trapez gebildet durch den Bereich zwischen x-Achse und Seite 3-4

T_3: Trapez gebildet durch den Bereich zwischen x-Achse und Seite 1-2

10 http://www.arndt-bruenner.de/mathe/geometrie/schwerpunktdreieck.htm [Lv 9]
11 http://www.przybilla.biz/bv/Skripte/BV3-Einfache_Streckenmessung_Fluchten_Rechte_Winkel.pdf [Lv10]

T_4: Trapez gebildet durch den Bereich zwischen x-Achse und Seite 2-3

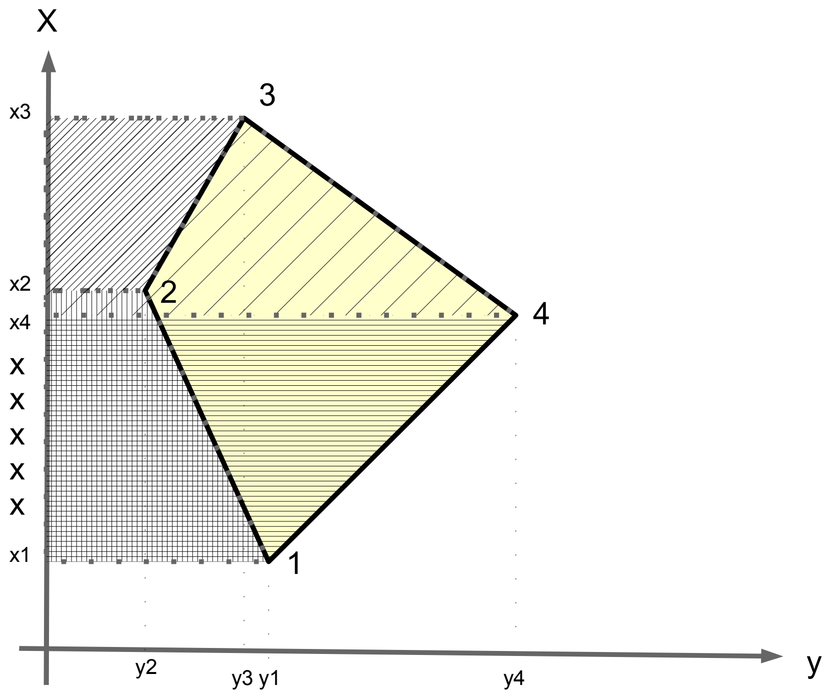

Abb. 4: Trapezaufteilung

$$A = T_1 + T_2 - T_3 - T_4$$

$$T_1 = (x_4 - x_1)(y_1 + y_4)\frac{1}{2} \qquad T_2 = (x_3 - x_4)(y_3 + y_4)\frac{1}{2}$$

$$T_3 = (x_2 - x_1)(y_1 + y_2)\frac{1}{2} \qquad T_4 = (x_3 - x_2)(y_2 + y_3)\frac{1}{2}$$

Somit ergibt sich die doppelte Fläche von A folgendermaßen:

$$2A = (x_4 - x_1)(y_1 + y_4) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) - (x_2 - x_1)(y_1 + y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 + y_3)$$

Zieht man die Minuszeichen vor den Klammern in die Klammern hinein, ergibt sich:

$$2A = (x_4 - x_1)(y_1 + y_4) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3)$$

Sortiert ergibt sich:

$$2A = (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + (x_4 - x_1)(y_4 + y_1)$$

Allgemein ausgedrückt ergibt sich die 1. Gaußsche Trapezformel:

$$2A = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{(i+1)})(y_i + y_{(i+1)})$$

Die 2. Gaußsche Trapezformel erhält man analog, wenn man die Trapeze nicht zur x-Achse sondern zur y-Achse bildet:

$$2A=\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_{(i+1)})(y_{(i+1)}-y_i)$$

4.2.2 Die Gaußsche Dreiecksformel

Die 1. Gaußsche Dreiecksformel kann aus der 1. Gaußschen Trapezformel durch Ausmultiplizieren und Streichen von Termen abgeleitet werden [12].

$$2A=(x_1y_1+x_1y_2-x_2y_1-x_2y_2)+(x_2y_2+x_2y_3-x_3y_2-x_3y_3)+(x_3y_3+x_3y_4-x_4y_3-x_4y_4)$$
$$+(x_4y_4+x_4y_1-x_1y_4-x_1y_1)$$

Die gleichfarbigen Terme der obigen Zeile heben sich auf:

$$2A=x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_4-x_4y_3+x_4y_1-x_1y_4$$

Die gleichfarbigen Terme werden ausgeklammert:

$$2A=x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_4-x_4y_3+x_4y_1-x_1y_4$$

$$2A=x_1(y_2-y_4)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_1-y_3)$$

In Summenschreibweise formuliert, ergibt sich die 1. Gaußsche Dreiecksformel:

$$\boxed{A=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}x_i(y_{(i+1)}-y_{(i-1)})} \quad \text{(Formel 4.1)}$$

Die 2. Gaußsche Dreiecksformel erhält man durch Umstellen der 2. Trapezformel:

(Formel 4.2)

$$\boxed{A=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}y_i(x_{(i-1)}-x_{(i+1)})}$$

Mit diesen Formeln lassen sich somit Flächen von Vielecken berechnen, deren Eckpunkte koordiniert und fortlaufend nummeriert sind. Da zur Herleitung der Formeln, Flächen dienten, die im Uhrzeigersinn nummeriert wurden, ergibt sich die Fläche nur korrekt, wenn bei der Anwendung auch im Uhrzeigersinn nummeriert wird. Sollte die Fläche gegen den Uhrzeigersinn nummeriert sein, ergibt sich eine negative Fläche. In diesem Fall ist der Betrag des Ergebnisses die Fläche.

4.2.3 Berechnung des Polygongesamtschwerpunktes

Mit den Gaußschen Dreiecksformeln liegen nun Werkzeuge vor, die allein von ihrem Namen her vermuten lassen, dass hier ein beliebiges Vieleck so in Dreiecke zerlegt wird, dass deren Gesamtsumme der des Vielecks entspricht. Von diesen Teildreiecken könnten

12 http://www.przybilla.biz/bv/Skripte/BV3-Einfache_Streckenmessung_Fluchten_Rechte_Winkel.pdf [Lv 10]

problemlos die Schwerpunkte (Formeln 3.1 + 3.2) ermittelt und zum Gesamtschwerpunkt kombiniert (Formeln 1.1 + 1.2) werden. Zunächst soll geklärt werden, wo diese Teildreiecke liegen. Hierzu wird ein einzelner Rechenschritt der 1. Gaußschen Dreiecksformel betrachtet, der im Wesentlichen so aussieht:

$$\frac{1}{2}x_i(y_{(i+1)}-y_{(i-1)})$$

Hier wird offensichtlich eine Dreiecksfläche berechnet, die aus der Grundseite ($y_{(i+1)}$-$y_{(i-1)}$) und der Höhe x_i besteht. Diese Fläche (Abb. 5) ist rot dargestellt. Von diesem roten Dreieck lässt sich der y-Wert des Schwerpunktes y_s wie folgt berechnen:

$$y_{s,i}=\frac{1}{3}(y_{(i-1)}+y_i+y_{(i+1)}) \quad (3.2)$$

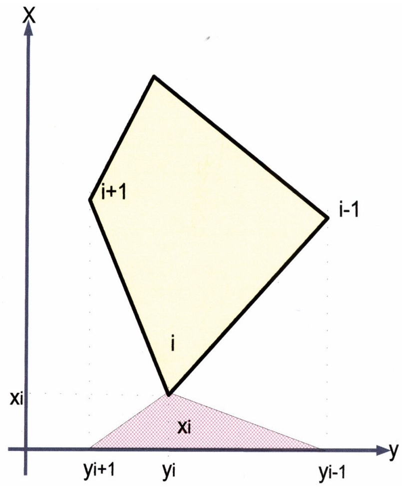

Abb. 5: Dreieckslage

Nun sind alle Größen bekannt, die in der Formel 1.2 benötigt werden, um den y-Wert des Gesamtschwerpunktes berechnen zu können. Wir kennen: die Teilschwerpunkte, die Teilflächen und die Gesamtfläche. Für den Y-Gesamtschwerpunkt ergibt sich:

$$Y_s=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6}(y_{i-1}+y_i+y_{i+1})*x_i*(y_{i+1}-y_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}x_i(y_{i+1}-y_{i-1})}$$

Analog zu diesem Vorgehen kann mit der 2. Gaußschen Dreiecksformel eine Formel für den x-Gesamtschwerpunkt hergeleitet werden. So ergibt sich:

$$X_s=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6}(x_{i-1}+x_i+x_{i+1})*y_i*(x_{i-1}-x_{i+1})}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}y_i(x_{i-1}-x_{i+1})}$$

Da diese Formeln fortlaufend berechnet werden können, sind sie leicht in einer Tabellenkalkulation anzuwenden.

5 Praktische Berechnung des Schwerpunktes

Alle wichtigen Daten und Dateien befinden sich auf der beigelegten CD. Zunächst wurden die gelieferten Koordinaten in die Spalten A (Y) und B (X) kopiert und die ersten beiden Koordinatenpaare am Ende wiederholt, um eine fortlaufende Berechnung durchführen zu können. Als nächstes erfolgte eine Reduktion der Koordinaten um einen Abzugswert (A3 u. B3). Hierdurch werden die Koordinatenachsen parallel verschoben. An dem eigentlichen Sachverhalt ändert sich hierdurch nichts, jedoch werden die Koordinatenwerte wesentlich kleiner und man läuft weniger schnell Gefahr, bei den nach-folgenden zahlreichen Rechenschritten u.U. existierende maximale Zahlengrößen des Programmes zu überschreiten. In der Spalte E wird folgender Term berechnet

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{6}(y_{i-1}+y_i+y_{i+1})*x_i*(y_{i+1}-y_{i-1})$$

und in E2138 aufsummiert . In der Spalte F geschieht das Gleiche für:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} x_i(y_{i+1}-y_{i-1})$$

Die Summenbildung in F2138 liefert die Fläche der Stadt Kamp-Lintfort mit ca.63 km². Diese Angabe stimmt, mit der der offiziellen Internetseite der Stadt Kamp-Lintfort, überein. Interessanterweise besitzt die berechnete Fläche ein negatives Vorzeichen. Hieraus kann man schließen, dass das gelieferte Umringpolygon nicht wie bei der Formelentwicklung vorausgesetzt im Uhrzeigersinn beschrieben wurde, sondern linksläufig ist. Dies hat jedoch auf den Schwerpunkt keinen Einfluss, da die Teilflächenschwerpunkte aus diesem Grund ebenfalls negativ berechnet wurden und nach der Division beider Werte sich ein positiver Wert ergibt (F2141). Abschließend wird noch der Abzugswert wieder aufgeschlagen. Es ergibt sich die y-Koordinate des Schwerpunktes. Für den x-Wert verfährt man in den Spalten G und H analog. Auf Dezimeter gerundet erhält somit folgendes **Endergebnis**:

$$Y_s = 2536154{,}8\,m \qquad x_s = 5709158{,}6\,m$$

6 Überprüfung des Ergebnisses

Um die Richtigkeit des gefundenen Schwerpunktes sicherzustellen, bedarf es einer unabhängigen Kontrolle. Sie erfolgt auf zwei unterschiedlichen Wegen.

6.1 Ermittlung des Schwerpunktes mit Lot und Landkarte

Eine vollständig unabhängige Kontrolle des errechneten Ergebnisses ist durch experimentelle Ermittlung des Schwerpunktes möglich. Hierzu wird vorgeschlagen, einen Körper aufzuhängen und die Lotrechte unter dem Aufhängepunkt mit einer zweiten Lotrechten unter einem weiteren Aufhängepunkt zum Schnitt zu bringen[13]. In die Stelle des aufzuhängenden Körpers tritt in unserem Fall ein ausgeschnittener Stadtplan Kamp-Lintforts. Die beiden Lotlinien treffen sich mit nur geringen Abweichungen in dem vorab berechneten Bereich (siehe Fazit) und sichern somit das Ergebnis nocheinmal ab.

Abbildung 6: Lot und Landkarte

6.2 Kontrollformel aus dem Internet

Nach ausgiebiger Internetsuche findet man eine englische Seite[14] mit folgenden Formeln:

$$C_x = \frac{1}{6A}\sum_{i=0}^{N-1}(x_i+x_{i+1})(x_i y_{i+1}-x_{i+1}y_i) \qquad C_y = \frac{1}{6A}\sum_{i=0}^{N-1}(y_i+y_{i+1})(x_i y_{i+1}-x_{i+1}y_i)$$

13 Meyers Physik-Lexikon, S. 739 [Lv 5]
14 http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/geometry/polyarea/ [Lv 11]

Die Formeln besitzen starke Ähnlichkeiten mit den hier Entwickelten und basieren wahrscheinlich auf vergleichbaren Überlegungen. Sie werden unbewiesen, rein interessenhalber und zusätzlich benutzt, um Vergleichswerte für die eigenen Ergebnisse zu erhalten. Offensichtlich wird in ihnen das mathematische x-y-Koordinatensystem benutzt. Die Abkürzung c steht für centroid (Schwerpunkt) und A ist die Gesamtflächengröße. Die Formeln werden in den Spalten I und J angewendet. **Sie liefern exakt die selben Ergebnisse** und bestätigen die vorangegangene Berechnung.

7 Fazit

Bleibt noch zu klären, wo sich dieser Punkt denn nun befindet. Hier findet man schnelle Hilfe auf der Internetseite des Landesvermessungsamtes[15]. Dort kann man die Schwerpunktkoordinaten eingeben. Das Programm markiert daraufhin den gesuchten Punkt im Bereich des Kamp-Lintforter Golfclubs. In der Abbildung 7 ist der Schwerpunkt in einen Stadtplan eingezeichnet.

Abbildung 7: Schwerpunkt

8 Literaturverzeichnis

[Lv 1] http://www.osz-kt.de/oszinfo/mitte.htm
Hans-Böckler-Schule OSZ Konstruktionsbautechnik
Lobeckstr. 76 D-10969 Berlin; zuletzt aufgerufen am 29.02.2008

[Lv 2] http://www.lwl.org/skulptur-projekte-download/muenster/97/sander/index.htm
Karin Sander; Schwerpunkt von Münster; zuletzt aufgerufen am 29.02.2008

[Lv 3] http://www.math.uni-siegen.de/ring/eu-mitte.html
Universität Siegen Fachbereich 6 Mathematik; Prof. Dr. Hartmut Ring;
Wo liegt die Mitte Europas?; zuletzt aufgerufen am 29.02.2008

[Lv 4] Lambacher Schweizer NRW 11
Ernst Klett Verlag; 1. Auflage; Stuttgart 2000; ISBN 3-12-732210-0

[Lv 5] Meyers Physik-Lexikon
Meyers Lexikonverlag; Mannheim 1973; ISBN 3-411-00921-7

[Lv 6] Mechanik und Festigkeitslehre: Formeln und Tabellen
TeMa- Verlag 1976

[Lv 7] Differential und Integralrechnung II
G. M. Fichtenholz; DVW; 8. Auflage; Berlin 1979

[Lv 8] Analysis für Ingenieure
Verlag Harri Deutsch; 14. Auflage; Frankfurt 1981

[Lv 9] http://www.arndt-bruenner.de/mathe/geometrie/schwerpunktdreieck.htm
Arndt Brünner; 2005; zuletzt aufgerufen am 29.02.2008

[Lv10]http://www.przybilla.biz/bv/Skripte/BV3Einfache_Streckenmessung_Fluchten_Rechte_Winkel.pdf
Prof. Dr.-Ing. H.-J. Przybilla; FH Bochum; zuletzt aufgerufen am 29.02.2008

[Lv 11] http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/geometry/polyarea/
Paul Bourke; 1988; zuletzt aufgerufen am 29.02.2008

[Lv 12] http://www.tim-online.nrw.de/tim-online/initParams.do
Landesvermessungsamt NRW; zuletzt aufgerufen am 29.02.2008